JOURNAL OF ALGEBRA 112, 349–369 (1988)

Spineurs purs et description cohomologique des groupes spinoriels

BERNARD MAGNERON*

Institut Universitaire de Technologie du Mans, Route de Laval, 72017 Le Mans Cedex, France

Communicated by J. Tits

Received June 1, 1985

Let V be an even dimensional vector space V over an arbitrary field K equipped with a nondegenerate quadratic form Q of maximal index. Consider (G^+, X_+), where G^+ is the special orthogonal group of (V, Q) acting on one of its two orbits X_+ in the set of totally singular vector subspaces of V of maximal dimension. Let $\tilde{G}^+$ be the special Clifford group of (V, Q) acting on its orbit $\tilde{X}_+$ in the set of pure spinors, which projects on X_+. Making use of the terminology and the results of [6], it is noted that $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ can be regarded as a transformation space extension of (G^+, X_+) by the group of units K_* of K. A cocycle of nonclassical type is then worked out which yields a complete cohomological description of $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ and also of the reduced Clifford group $\tilde{G}^+_{\mathrm{cr}}$. When K is algebraically closed, the algebraic structure of $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ and $\tilde{G}^+_{\mathrm{cr}}$ along with their rationality properties can also be taken into account in this description. Similar results are given when V is an $\mathbb{R}$-vector space and Q is a nondegenerate quadratic form of signature $(2p, 2q)$, so that an accurate cohomological description of the spin groups is obtained. © 1988 Academic Press, Inc.

INTRODUCTION

Dans l'article "Cohomologie des groupes et des espaces de transformation" [6], nous avons montré que, dans certaines catégories d'espaces topologiques à superstructure (discrète, différentielle, algébrique), on avait une bijection naturelle entre ce que nous appelons l'ensemble des classes d'extensions topologiquement localement triviales d'un espace de transformation (G, X) par un G-module et le premier groupe de cohomologie d'un complexe non classique.

Ces résultats sont utilisés dans ce qui suit pour étudier la situation suivante. Soit le groupe orthogonal G (resp. le groupe spécial orthogonal G^+) d'un K-espace vectoriel V de dimension $2r$, muni d'une forme quadratique Q non dégénérée d'indice maximal. Soit X (resp. X_+) l'ensemble des sous-espaces totalement singuliers maximaux de (V, Q) (resp. une orbite de G^+ dans X). Soit le groupe de Clifford $\tilde{G}$ (resp. le groupe de Clifford spécial $\tilde{G}^+$) de V et $\tilde{X}$ l'ensemble des spineurs purs (resp. $\tilde{X}_+$ le

* Present address: Département de Mathématiques, C.S.P. Université Paris-Nord, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France.

0021-8693/88 $3.00

sous-ensemble de $\tilde{X}$ qui se projette en X_+). Alors, $(\tilde{G}, \tilde{X})$ (resp. $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$) est une extension de l'espace de transformation (G, X) (resp. (G^+, X_+)) par K_*. De plus, au moins dans le cas où K est algébriquement clos, $\tilde{G}^+$ se réduit, au sens de [6, Section 5], à une extension $\tilde{G}^+_{\mathrm{cr}}$ du groupe G^+ par $\{\pm 1\}$ souvent appelée groupe de Clifford réduit.

La section 1 est consacrée à des rappels sur ces questions. Dans la section 2, on calcule un cocycle m, associé à l'extension $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ de (G^+, X_+) et la décrivant complètement. Cette fonction peut s'exprimer soit à l'aide d'une expression polynômiale explicite, soit en considérant certains opérateurs dont les valeurs propres ont une multiplicité paire puis en calculant le produit de ces valeurs propres affectées de la moitié de leur multiplicité. Par ailleurs, m est une fonction à 6 arguments dont 3 font intervenir la cohomologie de Čech. Une obstruction s'oppose à ce qu'on puisse se débarrasser de ces derniers, trouver une expression simplifiée de m et décrire $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ à l'aide d'une fonction à 3 arguments (voir l'assertion (2) de la proposition 1.5 et [6, proposition 5.4]).

Dans la section 3, on fournit une description cohomologique de $\tilde{G}^+_{\mathrm{cr}}$. On en déduit, dans la section 4, une description du groupe spinoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée de signature $(2p, 2q)$.

Pour simplifier, on s'est placé dans les sections 2 et 3 dans le contexte de la catégorie des espaces discrets. Il est cependant préférable d'utiliser le cadre de la catégorie $\mathscr{C}$ des k-variétés algébriques. Ceci permet aussi de prendre en compte les propriétés de rationalité des objets étudiés. C'est ce qui est fait dans la section 5; on y montre que m est un $\mathscr{C}$-morphisme, ce qui implique que $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ est une extension de (G^+, X_+) dans $\mathscr{C}$.

Enfin, dans la section 6, on montre que la description cohomologique de $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ permet celle des variétés de spineurs purs en dimension impaire et celle de $(\tilde{G}, \tilde{X})$.

Au cours de l'exposé, on utilise les conventions suivantes: si V est un K-espace vectoriel, on note I_V l'identité dans $\mathrm{End}(V)$. Si x est un sous-espace vectoriel de V, et $A \in \mathrm{End}(V)$, on note $A|_x$ l'élément de $\mathrm{Hom}(x, Ax)$ obtenu par restriction de A à x. Si x et x' sont deux sous-espaces supplémentaires de V, on note $\pi_x^{x'}$ la projection de V sur x parallèlement à x'. Si X est un objet d'une catégorie à produit, on pose $X^n = X \times \cdots \times X$ (n fois).

Une partie des résultats qui suivent a été annoncée dans [5].

1. Notations, Généralités et Rappels

1.1. Dans toute la suite, on désigne par K un corps et par K_* le groupe $K - \{0\}$ de ses unités. Soit (V, Q) un K-espace vectoriel de dimension n muni d'une forme quadratique, on note B la forme bilinéaire associée définie par $B(v, v') = Q(v+v') - Q(v) - Q(v')$ et $\perp$ la relation d'orthogonalité correspondante. Soient $\bigoplus V$ et $\bigwedge V$ les algèbres tensorielle et extérieure de V. On étend B à $\bigwedge V$ de telle sorte que

$$B(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_{p'}) = \delta_{pp'} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \varepsilon(\sigma)\, B(v_1, v'_{\sigma(1)}) \cdots B(v_p, v'_{\sigma(p)}).$$

L'algèbre de Clifford $C(V)$ de (V, Q) est définie comme le quotient de $\bigotimes V$ par l'idéal engendré par les éléments de la forme $v \otimes v - Q(v)\, 1$, $v \in V$. Soit $C^+(V)$ (resp. $C^-(V)$) la sous-algèbre de Clifford spéciale (resp. le sous-espace vectoriel) des éléments pairs (resp. impairs) de $C(V)$. Dans la suite, sauf indication contraire, on pose $C = C(V)$, $C^+ = C^+(V)$ et $C^- = C^-(V)$. On a $C = C^+ \oplus C^-$, $\dim C = 2^n$ et $\dim C^+ = 2^{n-1}$.

On note $G(V)$ le groupe orthogonal de (V, Q) et $X(V)$ l'ensemble des sous-espaces totalement singuliers maximaux x de V (i.e., tels que $Q|_x = 0$ et que x soit maximal pour cette propriété). Sauf mention expresse du contraire, on posera $G = G(V)$ et $X = X(V)$. On a une action naturelle $(g, x) \mapsto gx$ de G sur X avec $gx = \{v \in V \mid g^{-1}v \in x\}$, autrement dit (G, X) est un espace de transformation. Si car $K \neq 2$, cette action est transitive (i.e., pour x_1, x_2 dans X, il existe $g \in G$ tel que $gx_1 = x_2$). Dans la suite, on supposera que Q est non dégénérée. L'action de G sur X est alors toujours transitive. L'indice de Q est la dimension commune des éléments de X, on a $\operatorname{ind} Q \leqslant [n/2]$.

1.2. On suppose désormais que la dimension de V est paire et égale, sauf indication contraire, à $2r$ et que $\operatorname{ind} Q = r$. Soit $x \in X$, alors il existe $i \in X$ tel que $V = x \oplus i$. Soit $g \in \operatorname{End}(V)$, on pose

$$\begin{aligned} A^i_x(g) &= \pi^i_x\, g|_x, & B^i_x(g) &= \pi^i_x\, g|_i \\ C^i_x(g) &= \pi^x_i\, g|_x \quad \text{et} & D^i_x(g) &= \pi^x_i\, g|_i. \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Nous posons $Y_i = \{y \in X \mid y \cap i = \{0\}\}$.

On voit que Y_i peut être muni d'une structure naturelle d'espace affine modelé sur l'espace vectoriel $\operatorname{Hom}_A(V/i, (V/i)^*)$ des homomorphismes antisymétriques de V/i dans son dual. En effet, tout élément y de Y_i est le graphe d'un élément W^i_{xy} de l'espace vectoriel

$$\mathcal{A}^i_x = \{W \in \operatorname{Hom}(x, i) \mid B(Wv, v) = 0 \text{ pour tout } v \in x\}$$

et la correspondance $y \to W^i_{xy}$ est une bijection. On obtient le résultat en identifiant x à V/i et i au dual de x. Par ailleurs, on a une bijection unique $w \to W$ de $\bigwedge^2 i$ sur $\mathcal{A}^i_x$ telle que pour $w = v_1 \wedge v_2$

$$Wv = B(v_2, v)\, v_1 - B(v_1, v)\, v_2, \qquad \forall v \in x. \tag{1.2.2}$$

On note w^i_{xy} l'élément associé à W^i_{xy} par cette bijection. Lorsque y et gy sont transverses à i, on a

$$W^i_{x,\,gy} = (C^i_x(g) + D^i_x(g)\, W^i_{xy})(A^i_x(g) + B^i_x(g)\, W^i_{xy})^{-1}. \tag{1.2.3}$$

Soient $x_1, x_2 \in X$. Du fait qu'il existe des matrices antisymétriques de noyau non nul si et seulement si on est en dimension paire, on peut déduire qu'il existe un élément i de X transverse à x_1 et à x_2 si et seulement si $r - \dim(x_1 \cap x_2)$ est paire. Cela entraîne en particulier que lorsque $r = 1$, on a card $X = 2$.

Notons δ l'application de X^2 dans $\mathbb{F}_2$ donnée par $\delta(x_1, x_2) = (r - \dim x_1 \cap x_2) \bmod 2$. Sur X^3, on a

$$\delta(x_0, x_1) + \delta(x_1, x_2) + \delta(x_2, x_0) = 0. \tag{1.2.4}$$

Pour le voir, on convient tout d'abord d'associer à $x \in X$ et à tout sous-espace vectoriel totalement isotrope y de V, l'élément x^y de X donné par $x^y = y + x \cap y^\perp$.

Posant $y = x_0 \cap x_1 + x_1 \cap x_2 + x_2 \cap x_0$, on voit que, pour $p = 0, 1, 2$ les x^y_p sont transverses dans $y^\perp/y$, et, d'après ce qui précède, que $0 = \frac{1}{2} \dim y^\perp/y = 3r - \dim y \pmod 2$. D'où la formule (1.2.4).

Du fait que δ est G-invariante sur X^2, on déduit que l'application $g \to \chi(g) = \delta(x, gx)$ est un caractère de G dans $\mathbb{F}_2$ indépendant du choix de x. On se fixe un élément O de X qui servira d'origine dans la suite. On pose

$$\begin{aligned} &G^+(V) = \chi^{-1}(0), \\ &X_+(V) = \{x \in X \mid \delta(O, x) = 0\},\ X_-(V) = \{x \in X \mid \delta(O, x) = 1\}. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Sauf mention expresse du contraire, on posera dans la suite $G^+ = G^+(V)$ $X_+ = X_+(V)$ et $X_- = X_-(V)$. On voit que G^+ est un sous-groupe d'ordre 2 dans G, appelé dans [1] groupe des rotations; lorsque car $K \neq 2$, ce groupe coïncide avec le groupe spécial orthogonal de (V, Q). Ses orbites dans X coïcident avec X_+ et X_-.

1.3. Il est bien connu (voir [1, 2]) que C (resp. C^+) possède, à équivalence près une (resp. deux) représentation(s) irréductible(s) non triviale(s) dans un (resp. deux) K-espace(s) vectoriel(s) appelé(s) espace(s) des spineurs (resp. des demi-spineurs). Dans la suite, on dénote par (ρ, S) (resp. (ρ_+, S_+) et (ρ_-, S_-)) une telle représentation. On a une décomposition unique $S = S_+ \oplus S_-$ avec $\dim S = 2^r$ et $\dim S_+ = \dim S_- = 2^{r-1}$, de telle sorte que S_+ et S_- sont stables par $\rho|_{C^+}$ et que $\rho|_{C^+} = \rho_+ \oplus \rho_-$. De plus, ρ (resp. ρ_+, resp. ρ_-) définit une bijection de C (resp. C^+) sur End S (resp. End S_+, resp. End S_-). Les commutants de ρ, ρ_+ et ρ_- ont donc pour éléments des multiples de I_S, I_{S_+} et I_{S_-}.

On obtient une famille de représentations (ρ_x, S_x) de C, indexées par les éléments x de X et équivalentes à (ρ, S), en considérant les C-modules $S_x = C/Cx$. Donnons-nous $i \in X$ tel que $i \cap x = \{0\}$. Comme $v \wedge v = Q(v) = 0$ sur i, l'algèbre extérieure $\bigwedge i$ s'identifie à une sous-algèbre unitaire de C. On vérifie que $C = \bigwedge i \oplus Cx$. Donc S_x est isomorphe à $\bigwedge i$, et on obtient une représentation ρ^i_x de C dans $S^i_x = \bigwedge i$. On vérifie (voir [1]) que $\rho^i_x \colon C \to \operatorname{End}(\bigwedge i)$ est une bijection en utilisant les formules

$$\rho^i_x(v)\,\omega = \zeta_v \omega \qquad \text{pour } v \in x \subsetneq C \quad \text{et} \quad \omega \in \bigwedge i \tag{1.3.1}$$

$$\rho^i_x(v')\,\omega = v' \wedge \omega \qquad \text{pour } v' \in i \subsetneq C \quad \text{et} \quad \omega \in \bigwedge i \tag{1.3.2}$$

où ζ_v est l'antidérivation de $\bigwedge i$ qui prolonge la forme bilinéaire $v' \to B(v, v')$ sur i.

On désignera par $\mathscr{I}_{x'x}$ (resp. $\mathscr{I}_x$, resp. $\mathscr{I}^i_x$) un opérateur d'entrelacement de (ρ_x, S_x) dans $(\rho_{x'}, S_{x'})$ (resp. de (ρ, S) dans (ρ_x, S_x), resp. de (ρ, S) dans $(\rho^i_x, \bigwedge i)$).

Si on pose $S^+_x = C^+/C^- x$ et $S^-_x = C^-/C^+ x$, on a $S_x = S^+_x \oplus S^-_x$ de telle sorte que S^+_x (resp. S^-_x) est isomorphe au sous-espace vectoriel $\bigwedge^+ i$ (resp. $\bigwedge^- i$) des éléments pairs (resp. impairs) de $\bigwedge i$. Les sous-espaces S^+_x et S^-_x de S_x (ou $\bigwedge^+ i$ et $\bigwedge^- i$ de $\bigwedge i$) sont stables sous l'action de C^+. On vérifie (voir [2, II.2.3]) que les représentations correspondantes ρ^+_x et ρ^-_x, (ou ρ^{i+}_x et ρ^{i-}_x) de C^+ ne sont pas équivalentes.

1.4. Soit $g \in G$, l'application $v \to \rho(gv)$ de V dans $\operatorname{End}(S)$ se prolonge en une représentation de C dans S équivalente à ρ. On est alors conduit à poser

$$\tilde{G}(V) = \{\tilde{g} \in \operatorname{Aut}(S) \mid \exists g \in G,\ \tilde{g}\rho(v)\,\tilde{g}^{-1} = \rho(gv),\ \forall v \in V\} \tag{1.4.1}$$

$$\tilde{X}(V) = \{\tilde{x} \in S,\ \tilde{x} \neq 0 \mid \exists x \in X,\ \rho(v)\,\tilde{x} = 0,\ \forall v \in x\}. \tag{1.4.2}$$

Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, on pose $\tilde{G} = \tilde{G}(V)$ et $\tilde{X} = \tilde{X}(V)$. Le lemme de Schur et le fait que la représentation naturelle de G dans V est fidèle entraîne que le groupe $\tilde{G}$ est une extension de G par K_*, on note π' l'homomorphisme $\tilde{g} \to g$ de $\tilde{G}$ sur G. On pourrait démontrer que $\tilde{G}$ coïncide avec le groupe de Clifford de (V, Q) selon la terminologie de [2] et de [1].

Notons maintenant qu'une droite vectorielle d'éléments $\tilde{x}$ de S est associée au plus à un élément $x = \pi(\tilde{x})$, tel que (1.4.2) soit vérifié. En effet, s'il en existait un second x', on pourrait choisir $v \in x$ et $v' \in x'$ tels que $B(v, v') = 1$ et on aurait $\tilde{x} = (\rho(v')\,\rho(v) + \rho(v)\,\rho(v'))\,\tilde{x} = 0$. De plus, en appliquant (1.3.1), on voit que les éléments $\tilde{x}$ de la droite vectorielle $(\mathscr{I}^i_x)^{-1}(K1_{\bigwedge i})$ vérifient (1.4.2). Ceci prouve que $(\tilde{X}, \pi, X, K_*)$ est un fibré principal, d'espace total $\tilde{X}$, de base X et de groupe structural K_*. Les éléments de $\tilde{X}$ sont appelés *spineurs purs* dans [2].

Conformément aux notations et aux conventions du 3.2 de [6], on convient que dans toutes les formules et tous les énoncés dans lesquels g et $\tilde{g}$ (resp. x et $\tilde{x}$) apparaissent simultanément, on a $\pi'(\tilde{g}) = g$ (resp. $\pi(\tilde{x}) = x$). On voit que $\tilde{X}$ est stable par l'action de $\tilde{G}$ sur S et que sur $\tilde{G} \times \tilde{X}$, on a $\pi(\tilde{g}\tilde{x}) = \pi'(\tilde{g})\, \pi(\tilde{x})$. Dans la catégorie des espaces discrets, on a la

1.5. PROPOSITION. (1) *Dans la terminologie et les notations de* [6], $(\tilde{G}, \tilde{X})$ *est une extension par* K_* *de l'espace de transformation* (G, X). *Autrement dit* $(\tilde{G}, \tilde{X}) \in \overline{F(G, X, K_*)}$.

(2) $(\tilde{G}, \tilde{X})$ *n'est pas un élément de* $F(G, X, K_*)$.

Preuve. Il reste à montrer le (2). Pour que $(\tilde{G}, \tilde{X}) \in F(G, X, K_*)$, il est nécessaire d'après le (2) de la proposition 5.4 de [6] que pour $\tilde{x}, \tilde{\imath} \in \tilde{X}$ et $\tilde{g} \in \tilde{G}$, les égalités $\tilde{g}\tilde{x} = u\tilde{x}$ et $\tilde{g}\tilde{\imath} = u'\tilde{\imath}$ (où $u, u' \in K_*$) entraînent que $u = u'$. Choisissons x et i transverses. D'après (1.3.1) et (1.3.2), on peut supposer que $\mathscr{I}^i_x \tilde{x} = 1_{\wedge i}$ et $\mathscr{I}^i_x \tilde{\imath} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_r$ où les $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ forment une base de i. Soit $g \in G$ qui laisse stables x et i et tel que $\det(g|_i) = u \neq 1$. Il existe un élément $\tilde{g}$ de $\tilde{G}$ dont l'action naturelle sur $\bigwedge i = S^i_x$ prolonge celle de g sur i. On a alors $\tilde{g}\tilde{x} = \tilde{x}$ et $\tilde{g}\tilde{\imath} = u\tilde{\imath}$. ∎

On peut vérifier que le groupe $\tilde{G}^+(V) = \pi'^{-1}(G^+)$ est isomorphe au groupe de Clifford spécial, selon la terminologie de [2] et de [1]. On pose $\tilde{X}_+(V) = \tilde{X} \cap S_+$ et $\tilde{X}_-(V) = \tilde{X} \cap S_-$. Dans la suite, sauf mention expresse du contraire, on pose $\tilde{G}^+ = \tilde{G}^+(V)$, $\tilde{X}_+ = \tilde{X}_+(V)$ et $\tilde{X}_- = \tilde{X}_-(V)$.

1.6. PROPOSITION. (1) *On a* $\tilde{X} = \tilde{X}_+ \cup \tilde{X}_-$.

(2) *Soient* $x \in X$ *et* $\tilde{x}' \in \tilde{X}$; *alors* $\mathscr{I}_x \tilde{x}' \in S^+_x$ (*resp.* S^-_x) *si et seulement si* $\delta(x, x') = 0$ (*resp.* 1).

(3) *Soient* $x, x' \in X$; *alors la représentation* (ρ^+_x, S^+_x) *de* C^+ *est équivalente à* $(\rho^+_{x'}, S^+_{x'})$ (*resp.* $(\rho^-_{x'}, S^-_{x'})$) *si et seulement si* $\delta(x, x') = 0$ (*resp.* 1).

(4) *Soit* $\tilde{g} \in \tilde{G}$; *alors* $\tilde{g}S_+ = S_+$ (*resp.* S_-) *si et seulement si* $\tilde{g} \in \tilde{G}^+$ (*resp.* $\tilde{G} - \tilde{G}^+$).

Preuve. (1) Pour vérifier que $\tilde{x} \in \tilde{X}$ est un élément de $\tilde{X}_+ \cup \tilde{X}_-$, il suffit de remarquer que $\mathscr{I}^i_x \tilde{x} \in \bigwedge^+ i$ en tant que multiple de l'identité.

(2) Soit i' un supplémentaire de $x \cap x'$ dans x' et $f_1, ..., f_p$ une base de i'. Soit $i \in X$ avec $i \cap x = \{0\}$ et $i' \subset i$. On vérifie que $\mathscr{I}^i_x \tilde{x}'$ est un multiple de $f_1 \wedge \cdots \wedge f_p$ et que, par conséquent, $\mathscr{I}^i_x \tilde{x}' \in \bigwedge^{(-1)^p} i$. D'où le résultat, puisque $\delta(x, x') = (-1)^p$.

(3) On a $\mathscr{I}_x \tilde{x} \in S_x^+$ puis $\mathscr{I}_x \tilde{x}' \in S_x^{(-1)^p}$ où $p = \delta(x, x')$ d'après le (2). Cela implique le résultat.

(4) Comme $\tilde{g} S_+$ est stable sous l'action de C^+, il est égal à S_+ ou à S_-. On choisit alors $\tilde{x} \in S_+$ et on utilise le (1). ▌

Dans la suite, on convient que la representation (ρ_+, S_+) de C^+ est équivalente à (ρ_O^+, S_O^+); utilisant la formule (1.2.5) et le (3) de la proposition, on voit que, dans ce cas, $\tilde{X}_+ = \pi^{-1}(X_+)$. Dans ces conditions, $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+) \in F(G^+, X_+, K_*)$.

1.7. Soient $x, i \in X$ avec $x \cap i = \{0\}$. Notons $(\,|\,)_{x,i}$ la restriction à $\bigwedge i \times \bigwedge x$ de la forme bilinéaire B sur $\bigwedge V \times \bigwedge V$. Utilisant (1.3.1) et (1.3.2), on vérifie que $(\rho_x^i(v)\,\omega \,|\, \omega')_{x,i} = (\omega \,|\, \rho_i^x(v)\,\omega')_{x,i}$ pour $\omega \in \bigwedge i = S_x^i$, $\omega' \in \bigwedge x = S_i^x$ et $v \in V \subsetneq C$.

Sur S^2, on pose

$$(s \,|\, s') = (\mathscr{I}_x^i s \,|\, \mathscr{I}_i^x s')_{x,i}. \tag{1.7.1}$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire non nulle vérifiant

$$(\rho(v)\, s \,|\, s') = (s \,|\, \rho(v)\, s') \qquad \text{pour } s, s' \in S \qquad \text{et} \qquad v \in V \subsetneq C. \tag{1.7.2}$$

On constate facilement qu'à un scalaire multiplicatif près, il n'existe qu'un seule forme vérifiant (1.7.2) et qu'elle est nécessairement non dégénérée. On démontre qu'elle est symétrique ou alternée suivant que $(-1)^{(r(r-1))/2}$ est égal à 1 ou à -1 (voir [2, III.2.2.]).

L'unicité à un scalaire multiplicatif près de $(\,|\,)$ entraîne l'existence d'un homomorphisme $\tilde{\beta}$ du groupe $\tilde{G}$ dans K_* tel que $(\tilde{g}s \,|\, \tilde{g}s') = \tilde{\beta}(\tilde{g})(s \,|\, s')$ et d'un homomorphisme β de G dans K_*/K_*^2 tel que $\beta(g) = \tilde{\beta}(\tilde{g}) \pmod{K_*^2}$.

On pose $\tilde{G}_{\mathrm{cr}} = \operatorname{Ker} \tilde{\beta}$, $G_{\mathrm{or}} = \operatorname{Ker} \beta$, $\tilde{G}_{\mathrm{cr}}^+ = \tilde{G}^+ \cap \tilde{G}_{\mathrm{cr}}$ et $G_{\mathrm{or}}^+ = G^+ \cap G_{\mathrm{or}}$. On peut vérifier que $\tilde{G}_{\mathrm{cr}}^+$ et G_{or}^+ coïncident avec le groupe de Clifford réduit et le groupe orthogonal réduit tels qu'ils sont définis dans [2, 1]. Il est clair que le groupe $\tilde{G}_{\mathrm{cr}}$ (resp. $\tilde{G}_{\mathrm{cr}}^+$) est une extension de G_{or} (resp. G_{or}^+) par $\{\pm 1\}$.

2. Description Cohomologique de $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$

Notre but dans cette section est de fournir une description cohomologique naturelle de $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ puis de $\tilde{G}_{\mathrm{cr}}^+$. Dans la section 6, on constatera qu'on peut en déduire une description cohomologique de $(\tilde{G}, \tilde{X})$ tout entier. Les notations sont identiques à celles de la section précédente. Nous utilisons systématiquement les définitions et les résultats de [6]. Pour simplifier, nous nous plaçons d'abord dans le cadre de la catégorie des espaces discrets; dans la section 5, nous donnerons des résultats complémentaires de géométrie algébrique sur la question.

2.1. Considérons l'espace de transformation (G^+, I) avec $I = X_{(-1)^r}$. Soit l'ouvert G-invariant $\mathbf{U}$ de $I \times X_+^2$ (pour la topologie discrète),

$$\mathbf{U} = \{(i, x, x') \in I \times X^2 \mid i \cap x = \{0\},\ i \cap x' = \{0\}\}.$$

Dans la terminologie de [6, section 2], $\mathbf{U}$ est l'ouvert de définition d'un G-recouvrement $\mathscr{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X_+^2 avec $U_i = \{(x, x') \mid (i, x, x') \in \mathbf{U}\}$.

On définit le morphisme $s\colon (i, \tilde{x}, \tilde{x}') \to s_i(\tilde{x}, \tilde{x}')$ sur l'ouvert des éléments de $I \times \tilde{X}_+^2$ tels que $(i, x, x') \in \mathbf{U}$, à valeurs dans K_*, par

$$s_i(\tilde{x}, \tilde{x}') = (\tilde{x} \mid \tilde{\imath})^{-1} (\tilde{x}' \mid \tilde{\imath}).$$

On voit que s est une fonction de Maslov relativement à $\mathscr{U}$, associée par la formule (4.3.1) de [6] à un élément $m = \phi(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+, s)$ de $Z^2(G^+, d\mathscr{U}, K_*)$ donné par

$$\begin{aligned} m_{i_0 i_1 i_2}(x_0, x_1, x_2) &= (\tilde{x}_0 \mid \tilde{\imath}_0)(\tilde{x}_1 \mid \tilde{\imath}_0)^{-1} (\tilde{x}_1 \mid \tilde{\imath}_1)(\tilde{x}_2 \mid \tilde{\imath}_1)^{-1} (\tilde{x}_2 \mid \tilde{\imath}_2)(\tilde{x}_0 \mid \tilde{\imath}_2)^{-1} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{F}_3} (\tilde{x}_p \mid \tilde{\imath}_p)(\tilde{x}_{p+1} \mid \tilde{\imath}_p)^{-1} \qquad (2.1.1) \end{aligned}$$

sur l'ouvert des éléments $(i_0, i_1, i_2; x_0, x_1, x_2)$ de $I^3 \times X_+^3$ tels que $(x_p, x_{p+1}) \in U_{i_p}$.

Nour rappelons brièvement comment la connaissance de m permet d'obtenir une description cohomologique de $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ [6, section 4].

On a un unique élément c de $\check{Z}^{1,1}(G, \mathscr{U}, K_*)$ tel que $dc = \check{d}m$, donné par

$$\begin{aligned} c_{i'i}(x, x') &= s_{i'}(\tilde{x}, \tilde{x}')^{-1} s_i(\tilde{x}, \tilde{x}') = (\tilde{x} \mid \tilde{\imath}')(\tilde{x}' \mid \tilde{\imath}')^{-1} (\tilde{x}' \mid \tilde{\imath})(\tilde{x} \mid \tilde{\imath})^{-1} \\ &= m_{iii'}(x', x, x). \end{aligned}$$

Soit $\mathscr{U}(O) = (U(O)_i)_{i \in I}$ (resp. $\mathscr{U}(O)^* = (U(O)_i^*)_{i \in I}$) le recouvrement de X_+ (resp. G^+) défini par

$$U(O)_i = \{x \in X_+ \mid (O, x) \in U_i\}, \text{ resp. } U(O)_i^* = \{g \in G^+ \mid (O, gO) \in U_i\}.$$

On a une famille d'isomorphismes β_i (resp. β'_i), $i \in I$, de $K_* \times U(O)_i$ dans $\pi^{-1}(U(O)_i)$ (resp. de $K_* \times U(O)_i^*$ dans $\pi'^{-1}(U(O)_i^*)$) tels que $\beta_{i'}^{-1} \circ \beta_i(u, x) = (u + c_{i'i}(O, x), x)$ chaque fois que $(O, x) \in U_i \cap U_{i'}$, (resp. $\beta'^{-1}_{i'} \circ \beta'_i(u, g) = (u + c_{i'i}(O, gO), g)$ chaque fois que $(O, gO) \in U_i \cap U_{i'}$). On pose $\beta_i(u, x) = (u, i, x)$ (resp. $\beta'_i(u, g) = (u, i, g)$). La loi de composition de $\tilde{G}^+$ et son action sur $\tilde{X}_+$ sont alors données par les formules

$$\begin{aligned} (u, i, g)(u', i', g') &= (uu' m_{i, gi', i''}(O, gO, gg'O), i'', gg') \\ (u, i, g)(u', i', x) &= (uu' m_{i, gi', i''}(O, gO, gx), i'', gx) \end{aligned} \qquad (2.1.2)$$

pour $g \in U(O)_i^*$, $g' \in U(O)_{i'}^*$, $gg' \in U(O)_{i''}^*$, $x \in U(O)_{i'}$ et $gx \in U(O)_{i''}$.

2.2. Afin de calculer m, nous explicitons certains spineurs purs de la représentation $(\rho^i_x, \bigwedge i)$ de C pour $(i, x) \in I \times X_+$ et $i \cap x = \{0\}$. Soient $f_1, ..., f_r$ une base de i et $w \in \bigwedge^2 i$ avec $w = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant r} \lambda_{k_1 k_2} f_{k_1} \wedge f_{k_2}$. La fonction polynômiale de $\bigwedge^2 i$ dans $\bigwedge^{2p} i$ qui à w associe

$$\frac{\bigwedge^p w}{p!} = \sum_{k_1 < k_2 < \cdots < k_{2p}} \lambda_{k_1 k_2} \cdots \lambda_{k_{2p-1} k_{2p}} f_{k_1} \wedge f_{k_2} \wedge \cdots \wedge f_{k_{2p}}$$

ne dépend pas du choix de la base, ce qui justifie la notation $\bigwedge^p w/p!$ qui pourrait sembler abusive lorsque car $K \leqslant p$.

D'après 1.2, on peut associer à $w \in \bigwedge^2 i$ un élément W de $\mathfrak{A}^i_x$. Pour $v \in x$, on a $\zeta_v w = -Wv \in i$. On en déduit l'identité polynômiale suivante

$$\zeta_v \left(\frac{\bigwedge^p w}{p!} \right) = -Wv \wedge \left(\frac{\bigwedge^{p-1} w}{(p-1)!} \right). \tag{2.2.1}$$

2.3. Proposition (voir aussi [2, 7]). *Soit $\tilde{y} \in \tilde{X}$. Si $y \cap i = \{0\}$, l'élément $\mathscr{I}^i_x \tilde{y}$ de $\bigwedge i$ est égal à un facteur multiplicatif près à*

$$\exp w = 1 + w + \frac{\bigwedge^2 w}{2!} + \cdots + \frac{\bigwedge^{[r/2]} w}{[r/2]!} \qquad \textit{avec} \qquad w = w^i_{xy}.$$

Preuve. Du fait que pour $v' \in y$, $\rho(v')\, \tilde{y} = 0$, on déduit, en utilisant (1.3.1) et (1.3.2), que $\mathscr{I}^i_x \tilde{y}$ est, à un facteur multiplicatif près, l'unique élément de $\bigwedge i$ tel que $(\zeta_v + Wv \bigwedge)\, \mathscr{I}^i_x \tilde{y} = 0$, pour tout v de x. D'après (2.2.1), ceci est bien vérifié si on choisit $\mathscr{I}^i_x \tilde{y} = \exp w$.

2.4. Lorsque $K = \mathbb{F}_2$, la fonction m est identiquement égale à 1. Supposons maintenant $K \neq \mathbb{F}_2$ et donnons-nous $x_0, x_1, x_2 \in X_+$. Alors on vérifie qu'il existe un élément i de I transverse à x_0, x_1 et x_2.

Soit, par ailleurs, un endomorphisme M d'un K-espace vectoriel dont les valeurs propres différentes de 1: $\mu_0, ..., \mu_p$ (dans une clôture algébrique de K) ont toutes une multiplicité paire $2r_0, ..., 2r_p$. On convient de poser

$$\det{}^{1/2} M = \mu_0^{r_0} \cdots \mu_p^{r_p}.$$

2.5. Théorème. *Pour $i \in I$ transverse à x_0, x_1 et x_2, on a, avec les données de* (2.1.1)

$$m_{i_0 i_1 i_2}(x_0, x_1, x_2) = \prod_{p \in \mathbb{F}_3} B(\exp w^{x_p}_{i_p i}, \exp w^{i_p}_{x_p x_{p+1}})$$
$$= \prod_{p \in \mathbb{F}_3} \det{}^{1/2}(I_{x_p} - W^{x_p}_{i_p i} W^{i_p}_{x_p x_{p+1}}). \tag{2.5.1}$$

Preuve. D'après (2.1.1), on a

$$m_{i_0 i_1 i_2}(x_0, x_1, x_2) = \prod_{p \in \mathbb{Z}_3} (\tilde{x}_p | \tilde{\imath}_p)(\tilde{x}_p | \tilde{\imath})^{-1} (\tilde{x}_{p+1} | \tilde{\imath})(\tilde{x}_{p+1} | \tilde{\imath}_p)^{-1}.$$

On obtient alors la première formule du théorème en utilisant la formule auxiliaire suivante qui est une conséquence de (1.7.1) et de la proposition 2.3. Soient $x, x' \in X$ transverses à $i, i' \in I$. On a

$$\begin{aligned}&(\tilde{x} | \tilde{\imath})(\tilde{x} | \tilde{\imath}')^{-1} (\tilde{x}' | \tilde{\imath}')(\tilde{x}' | \tilde{\imath})^{-1} \\ &\quad = (\mathscr{I}^i_x \tilde{x} | \mathscr{I}^x_i \tilde{\imath})_{x,i} (\mathscr{I}^i_x \tilde{x} | \mathscr{I}^x_i \tilde{\imath})_{x,i}^{-1} ((\mathscr{I}^i_x \tilde{x}' | \mathscr{I}^x_i \tilde{x}')_{x,i} (\mathscr{I}^i_x \tilde{x}' | \mathscr{I}^x_i \tilde{\imath})_{x,i}^{-1} \\ &\quad = B(\exp w^x_{ii'}, \exp w^i_{xx'}). \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

Pour prouver la deuxième formule du théorème, on utilise les deux lemmes suivants.

2.6. Lemme. *Soient K un corps algébriquement clos, x un K-espace vectoriel de dimension $r = 2p$ (ou $2p+1$) et x^* son dual. Pour tous les éléments (w, w') d'un certain ouvert de Zariski non vide de $\bigwedge^2 x^* \times \bigwedge^2 x$, il existe une base $(e_1, f_1, \ldots, e_p, f_p, (e_{p+1}))$ de x, de base duale $(e_1^*, f_1^*, \ldots, e_p^*, f_p^*, (e_{p+1}^*))$ de telle sorte que w et w' s'écrivent sous la forme*

$$w = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k^* \wedge f_k^*, \qquad w' = \sum_{k=1}^{p} \lambda'_k e_k \wedge f_k, \qquad \textit{avec} \qquad \lambda_k, \lambda'_k \in K. \tag{2.6.1}$$

Preuve. Soit $w \to W$ l'isomorphisme de $\bigwedge^2 x^*$ sur l'espace vectoriel des éléments antisymétriques de Hom (x, x^*), défini pour $w = e^* \wedge f^*$ et $v \in x$ par $Wv = f^*(v)\, e^* - e^*(v)\, f^*$. Soit A la forme bilinéaire alternée sur x définie par $A(v, v') = Wv(v')$ et $\perp A$ la relation d'orthogonalité correspondante (sur x). On associe de même à $w' \in \bigwedge^2 x$, un élément W' de Hom(x^*, x), une forme bilinéaire alternée A' et une relation d'orthogonalité $\perp A'$ sur x^*. L'endomorphisme $M = W'W$ de x est A-symétrique.

Supposons qu'on puisse décomposer x sous la forme $x = \bigoplus_k^{\perp A} x_k$ de telle sorte que les x_k soient stables par M et que $x^{\perp A}$ soit inclus dans l'un des x_k, alors on vérifie que la décomposition duale prend la forme $x^* = \bigoplus_k^{\perp A'} x_k^*$. Soit w_k (resp. w'_k), l'élément de $\bigwedge^2 x_k^*$ (resp. $\bigwedge^2 x_k$) associé à $W|_{x_k}$ et $W'|_{x_k^*}$. D'après ce qui précède, on a $w = \sum_k w_k$ et $w' = \sum_{k'} w'_k$. On voit facilement que cela implique le lemme dans le cas particulier où $\dim x_k \leqslant 2$ pour tout k.

Supposons maintenant que x_k soit le sous-espace caractéristique associé à la $k$ième valuer propre μ_k de M. On choisit $x_k = x_0$ pour $\mu_k = 0$. Les x_k sont stables par M. Une double récurrence permet de vérifier que $x = \bigoplus_k^{\perp A} x_k$. De plus, $x^{\perp A} \subseteq x_0$. Cela implique que, pour $k \neq 0$, la restriction de A aux x_k est non dégénérée, ce qui entraîne que dim x_k et la multiplicité de μ_k sont paires. On en déduit immédiatement que M possède au plus p valuers propres distinctes lorsque $r = 2p$, et $p+1$ lorsque $r = 2p+1$ (dans ce dernier cas l'une d'entre elles est nécessairement nulle). Lorsque les valeurs propres sont distinctes, on a nécessairement dim $x_k \leqslant 2$ ce qui implique le lemme.

Le lemme sera donc prouvé si on constate que, lorsque les (w, w') décrivent un ouvert de Zariski de $\bigwedge^2 x^* \times \bigwedge^2 x$, l'endomorphisme M correspondant possède p (resp. $p+1$) valeurs propres distinctes lorsque $r = 2p$ (resp. $2p+1$), ou de façon équivalente que $P(\mu) = \det(\mu I_x - M)$ ne possède pas de racine de multiplicité supérieure à 2, ou encore que $P(\mu)$, $P'(\mu)$ et $P''(\mu)$ n'ont pas de racines communes. Soit $K[w, w']$ (resp. $K(w, w')$), l'algèbre des polynômes (resp. le corps des fractions rationnelles) à coefficients dans K dont les variables sont les coordonnées des éléments de $\bigwedge^2 x^* \times \bigwedge^2 x$ relativement à une base donnée. On peut considérer que $P(\mu)$ est un élément de $K[w, w'][\mu]$, l'algèbre des polynômes à une indéterminée μ à coefficients dans $K[w, w']$. Le calcul du p.g.c.d. de $P(\mu)$, $P'(\mu)$ et $P''(\mu)$ dans $K(w, w')[\mu]$ donne nécessairement un élément non nul $Q(w, w')$ de $K[w, w']$. En effet, dans le cas contraire, $P(\mu)$ admettrait toujours une racine triple. Or, si on choisit w et w' comme dans l'énoncé du lemme, on a $P(\mu) = \prod_k (\mu + \lambda'_k \lambda_k)^2$ pour $r = 2p$ (resp. $P(\mu) = \mu \prod_{k \neq 0} (\mu + \lambda'_k \lambda_k)^2$ pour $r = 2p+1$). Donc $P(\mu)$ n'a pas de racine triple dès que les $\lambda'_k \lambda_k$ sont tous différents. Par conséquent, l'ouvert de Zariski formé par les éléments (w, w') tels que $Q(w, w') \neq 0$ est non vide et sur cet ouvert $P(\mu)$ n'admet pas de racine triple. Ceci prouve le lemme 2.6.

2.7. Lemme. *Soient* $(i, x) \in I \times X$ *avec* $i \cap x = \{0\}$. *Soient* $W \in \mathcal{A}_x^i$ *et* $W' \in \mathcal{A}_i^x$ *associés à* $w \in \bigwedge^2 i$ *et* $w' \in \bigwedge^2 x$ *comme dans* 1.2. *On a*

$$(1) \quad B^2(\exp w, \exp w') = \det(I_x - W'W) = \det(I_i - WW')$$

$$(2) \quad B(\exp w, \exp w') = \det{}^{1/2}(I_x - W'W) = \det{}^{1/2}(I_i - WW').$$

Preuve. (1) Nous continuons à poser $r = 2p$ ou $r = 2p+1$. Prouvons la première égalité qui équivaut à la 2ième par dualité. Identifions i avec x^* par B. Soit $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r$ une base quelconque de x et $\varepsilon_1^*, ..., \varepsilon_r^*$ la base duale dans i. L'égalité correspond à une identité polynômiale à coefficients entiers dont les variables sont les coordonnées de w et de w' dans les bases $(\varepsilon_k \wedge \varepsilon_{k'})_{k<k'}$ et $(\varepsilon_k^* \wedge \varepsilon_{k'}^*)_{k<k'}$ de $\bigwedge^2 x$ et de $\bigwedge^2 i$. Il suffit donc de la prouver pour un corps K algébriquement clos et sur un ouvert de Zariski quelconque de $\bigwedge^2 i \times \bigwedge^2 x$. On choisit cet ouvert comme dans le lemme

précédent de telle sorte que w et w' prennent la forme (2.6.1). Dans ce cas, on a successivement

$$\det(I_x - W'W) = \prod_{k=1}^{p} (1 + \lambda'_k \lambda_k)^2$$

$$\exp w = 1 + \sum_{\substack{1 \leqslant q \leqslant p \\ 1 \leqslant k_1 < \cdots < k_q \leqslant p}} \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_q} (e_{k_1} \wedge f_{k_1}) \wedge \cdots \wedge (e_{k_q} \wedge f_{k_q})$$

$$B(\exp w', \exp w) = \prod_{k=1}^{p} (1 + \lambda'_k \lambda_k).$$

(2) Soient les deux polynômes R et Q définis pour $\mu \neq 1$ par

$$R(\mu) = \det((1-\mu) I_x - W'W) = (1-\mu)^r \det(I_x - W'(1-\mu)^{-1} W)$$

$$Q(\mu) = (1-\mu)^p B(\exp w', \exp(1-\mu)^{-1} w).$$

On voit que $R(\mu)$ est le polynôme caractéristique de $I_x - W'W$ et, en utilisant le (1), que $Q^2(\mu) = R(\mu)$ lorsque $r = 2p$ et $(1-\mu) Q^2(\mu) = R(\mu)$ lorsque $r = 2p+1$. Donc $R(\mu)$ possède les mêmes racines différentes de 1 que $Q(\mu)$, affectées d'une multiplicité double. Cela prouve que $\det^{1/2}(I_x - W'W)$ est égal au terme constant de $Q(\mu)$, c'est-à-dire à $B(\exp w', \exp w)$.

3. Description cohomologique et réduction de $\tilde{G}^+$

Les hypothèses et les notations sont les mêmes que dans les deux sections précédentes. Cependant, nous supposons que G est un sous-groupe de $G(V)$, $G^+ = G^+(V) \cap G$, $\tilde{G}^+ = \pi'^{-1}(G^+)$, $\tilde{G}^+_{\rm cr} = \tilde{G}^+_{\rm cr}(V) \cap \tilde{G}^+$ et que $G^+_{\rm or} = \pi(\tilde{G}^+_{\rm cr})$. Nous continuons provisoirement à travailler dans la catégorie des espaces discrets.

3.1. Nous nous inspirons des résultats de [6, 4.7]. Nous nous donnons un sous-ensemble L de $I \times X_+$ formé d'éléments $l = (i, x)$ tels que $i \cap x = \{0\}$. Nous supposons que lorsque l varie dans L, les V_l ci-dessous recouvrent G^+,

$$V_l = \{ g \in G^+ \mid i \cap gx = \{0\} \}. \tag{3.1.1}$$

Dans ce cas, U' ci-dessous est l'ouvert de définition d'un G^+-recouvrement $\mathscr{U}' = (U'_l)_{l \in L}$ de $(G^+)^2$, avec action triviale de G^+ sur L,

$$\mathrm{U}' = \{ (l, g, g') \in L \times (G^+)^2 \mid l = (i, x), (gi \cap g'x = \{0\} \}.$$

On a $U'_l = \{ (g, g') \in (G^+)^2 \mid g^{-1} g' \in V_l \}$.

On note s' la fonction de Maslov naturelle pour $\tilde{G}^+$ relativement à $\mathscr{U}'$ donnée par

$$s'_l(\tilde{g}, \tilde{g}') = s_{gi}(\tilde{g}\tilde{x}, \tilde{g}'\tilde{x}) = (\tilde{g}\tilde{x} \mid \tilde{g}\tilde{\imath})^{-1} (\tilde{g}'\tilde{x} \mid g\tilde{\imath}). \tag{3.1.2}$$

L'élément $m' = \phi(\tilde{G}, s')$ de $Z^2(G^+, d\mathscr{U}', K_*)$ est défini pour $l_0 = (i_0, x_0)$, $l_1 = (i_1, x_1)$ et $l_2 = (i_2, x_2)$ par

$$m'_{l_0 l_1 l_2}(g_0, g_1, g_2) = s^{-1}_{g_0 i_0}(\tilde{g}_0\tilde{x}_0, \tilde{g}_1\tilde{x}_0)\, s^{-1}_{g_1 i_1}(\tilde{g}_1\tilde{x}_1, \tilde{g}_2\tilde{x}_1)\, s_{g_0 i_2}(\tilde{g}_0\tilde{x}_2, \tilde{g}_2\tilde{x}_2). \tag{3.1.3}$$

D'après [6, lemme 4.6 et (4.3.2)], on a un unique élément c' de $\check{Z}^{1,1}(G^+, \mathscr{U}', K_*)$ tel que $dc' = \check{d}m'$. On définit les fonctions γ et τ données pour l, $l' \in L$, avec $l = (i, x)$ et $l' = (i', x')$, par

$$\begin{aligned}
\gamma_l(g, g') &= m'_{lll}(e, g, gg') \\
&= (\tilde{g}'\tilde{x} \mid \tilde{g}^{-1}\tilde{\imath})(\tilde{x} \mid \tilde{g}^{-1}\tilde{\imath})^{-1} (\tilde{x} \mid \tilde{\imath})(\tilde{g}'\tilde{x} \mid \tilde{\imath})^{-1} \qquad \text{pour } g, g', gg' \in V_l \\
\tau_{l'l}(g) &= c'_{l'l}(e, g) \\
&= (\tilde{x}' \mid \tilde{\imath}')(\tilde{g}\tilde{x}' \mid \tilde{\imath}')^{-1} [(\tilde{x} \mid \tilde{\imath})(\tilde{g}\tilde{x} \mid \tilde{\imath})^{-1}]^{-1} \qquad \text{pour } g \in V_l \cap V_{l'},
\end{aligned}$$

e est l'élément neutre de G.

Supposons que pour tout couple g, g' de G^+ il existe un élément $l \in L$ tel que $g, g', gg' \in V_l$. Ceci est possible, lorsque $L = I \times X_+$, dès que $K \neq \mathbb{F}_2$. Alors la connaissance de γ et de τ permet d'obtenir une description cohomologique complète de $\tilde{G}^+$. En effet, conformément aux notations de [6, section 4], les éléments de $\tilde{G}^+$ peuvent s'écrire sous la forme $\tilde{g} = (u, l, g) = (s'_l(\tilde{e}, \tilde{g}), l, \pi'(\tilde{g}))$. Soit $\tilde{g}, \tilde{g}' \in \tilde{G}^+$. Choisissons $l, l' \in L$, avec $l = (i, x)$ et $l' = (i', x')$, tels que $g, g', gg' \in V_l$ et $g \in V_{l'}$. Posons $\tilde{g} = (u, l, g)$ et $\tilde{g}' = (u', l, g')$. On a

$$(u, l, g)(u', l, g') = (uu'\gamma_l(g, g'), l, gg') = \tilde{g}\tilde{g}' \tag{3.1.4}$$

$$(u, l, g) = (u\tau_{l'l}(g)^{-1}, l', g) = \tilde{g}. \tag{3.1.5}$$

Utilisant (2.5.2) et le lemme 2.7, on voit que

$$\gamma_l(g, g') = \det{}^{1/2}(I_x - W^x_{i, g^{-1}i} W^i_{x, g'x}). \tag{3.1.6}$$

Pour calculer τ, nous supposons de plus $i' \cap x = gi' \cap x = \{0\}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\tau_{l'l}(g) &= (\tilde{x}' \mid \tilde{\imath}')(\tilde{x}' \mid \tilde{g}^{-1}\tilde{\imath}')^{-1} (\tilde{g}^{-1}\tilde{x} \mid \tilde{g}^{-1}\tilde{\imath}')(\tilde{g}^{-1}\tilde{x} \mid \tilde{\imath}')^{-1} \\
&\quad \times [(\tilde{x} \mid \tilde{\imath})(\tilde{g}\tilde{x} \mid \tilde{\imath})^{-1} (\tilde{g}\tilde{x} \mid \tilde{g}\tilde{\imath}')(\tilde{x} \mid \tilde{g}\tilde{\imath}')^{-1}]^{-1} \\
&= \det{}^{1/2}(I_{x'} - W^{x'}_{i', g^{-1}i'} W^{i'}_{x', g^{-1}x}) \det{}^{-1/2}(I_x - W^x_{i, gi'} W^i_{x, gx}).
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Nous cherchons à transformer les formules (3.1.6) et (3.1.7). Nous associons à $g \in G$, et à $l=(i,x)$, $l'=(i',x') \in X^2$ tels que $i \cap x = \{0\}$ et $i' \cap x' = \{0\}$ les éléments

$$
\begin{aligned}
A_{l'l}(g) &= \pi^{i'}_{x'} g|_x \in \operatorname{Hom}(x, x') \\
A_l(g) &= A_{ll}(g) = A^i_x(g) \in \operatorname{End}(x).
\end{aligned} \tag{3.1.8}
$$

3.2. LEMME. *Soient* $l=(i,x)$, $l'=(i',x')$, $l''=(i'',x'') \in L$, *soient* $g, g' \in G^+$ *de telle sorte que* $gx \cap i'' = \{0\}$ *et* $g'x' \cap i = \{0\}$. *On a*

$$I_x - W^x_{i,g^{-1}i''} W^i_{x,g'x'} = A_{l''l}(g)^{-1} A_{l''l'}(gg') A_{ll'}(g')^{-1}. \tag{3.2.1}$$

Preuve. On vérifie successivement que

$$
\begin{aligned}
I_x + W^i_{xx'} &= \pi^i_{x'}|_x, \qquad \pi^{i''}_x|_i = -W^x_{ii''} \\
I_x - W^x_{ii''} W^i_{xx'} &= \pi^{i''}_x \pi^i_{x'}|_x.
\end{aligned} \tag{3.2.2}
$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
& I_x - W^x_{i,g^{-1}i''} W^i_{x,g'x'} \\
&= g^{-1}\pi^{i''}_{gx}\, g\pi^i_{g'x'}|_x \\
&= (g^{-1}\pi^{i''}_{gx}|_{x''})(\pi^{i''}_{x''} gg'|_{x'})(g'^{-1}\pi^i_{g'x'}|_x) \\
&= [\pi^{i''}_{x''} g|_x]^{-1} [\pi^{i''}_{x''} gg'|_{x'}][\pi^i_x g'|_{x'}]^{-1}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

D'où le

3.3. THÉORÈME. *Avec les données de* (3.1.6) *et de* (3.1.7), *on a*

(1) $\gamma_l(g, g') = \det^{1/2}(A_l(g)^{-1} A_l(gg') A_l(g')^{-1})$

(2) $\tau_{l'l}(g) = \det^{1/2}(A_{l'}(g)^{-1} A_{l'l}(e) A_{l'l}(g^{-1})^{-1}) \det^{-1/2}(A_{l'l}(g^{-1})^{-1} A_{l'l}(e) A_l(g)^{-1})$.

Soit l'homomorphisme $\varphi: u \to u^2$ de K_* dans lui-même et K^2_* son image. Dans les notations de [6, section 5], nous posons $m'^2 = \varphi(m') \in Z^2(G^+, d\mathscr{U}', K^2_*)$. Le résultat précédent entraîne que $m'^2 \in B^2(G^+, d\mathscr{U}', K_*)$. Plus précisément, on a

$$m'^2_{l_0 l_1 l_2}(e, g, gg') = \det^{-1} A_{l_0}(g) \det^{-1} A_{l_1}(g') \det A_{l_2}(gg'). \tag{3.3.1}$$

Dans l'esprit de la proposition 5.7 de [6], on a le

3.4. COROLLAIRE. (1) $\tilde{G}^+_{\mathrm{cr}} = \{(u, l, g) \in \tilde{G}^+ \mid u^2 = \det A_l(g)\}$.

(2) *Soit* $g \in G^+ \cap V_l$, *alors* $g \in G^+_{\mathrm{or}}$ *si et seulement si* $\det A_l(g) \in K^2_*$.

Preuve. Il suffit de prouver que pour $\tilde{g}=(u, l, g)$, on a $\tilde{\beta}(\tilde{g})=u^2 \det^{-1} A_l(g)$ lorsque les g décrivent un système générateur de G^+. Ceci est trivial lorsque $K=\mathbb{F}_2$. Dans le cas contraire, on démontre en adaptant [2, I.5.1] que G^+ est engendré par les éléments g qui laissent stable un sous-espace vectoriel non dégénéré V' de V de dimension 2 et tels que l'action de g sur $V'^{\perp}$ soit triviale. Il suffit donc de vérifier le corollaire pour $\dim V=2$. On a alors une base (e, f) de V dans laquelle on peut écrire $x=Ke$, $i=Kf$, $l=(i, x)$, $g=\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ et $A_l(g)=a$.

Si on travaille dans la représentation $(\rho_x^i, \bigwedge i)$ de C, $\tilde{x}$ et $\tilde{\imath}$ sont respectivement des multiples de $1_{\bigwedge i}$ et de f. On vérifie que $\tilde{g}\tilde{x}=u\tilde{x}$ et que $\tilde{g}\tilde{\imath}=ua^{-1}\tilde{\imath}$. Par conséquent, on a bien $\tilde{\beta}(\tilde{g})=u^2a^{-1}$. ∎

4. Le cas réel, description des groupes spinoriels

4.1. Nous nous proposons d'illustrer la section 3 par un exemple. Nous adoptons les notations et les conventions des sections 1 et 3.

Nous supposons de plus, que $K=\mathbb{C}$. Nous nous donnons un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension paire $2r$, muni d'une forme quadratique non dégénérée Q. Nous choisissons $V=E^{\mathbb{C}}$. Nous dénotons par Q et par B aussi bien la forme quadratique et sa forme bilinéaire associée sur E, que leur complexifiée sur V.

Nous nous plaçons dans le cadre de la catégorie des variétés différenciables. Dans cette section, G^+ désigne le groupe spécial orthogonal $G^+(E)$ de (E, Q). C'est évidemment un sous-groupe de Lie de $G^+(V)$. Il est connu que, dans ces conditions, $\tilde{G}^+_{\mathrm{cr}}$ est un groupe de Lie isomorphe au revêtement universel de G^+, qu'on appelle groupe spinoriel (voir [3], [2, 2.9] et [8]).

Soit $j\in G^+$ tel que $j^2=-I_E$. Notons (E, j), l'espace vectoriel complexe associé à j. Munissons-le de la forme hermitienne $H\colon (v, v')\mapsto B(v, v')+iB(v, jv')$ (avec $i=\sqrt{-1}$). Choisissons une base H-orthogonale $(v_1, \ldots, v_r)$ de (E, j). On vérifie que l'orientation $\varepsilon(j)$ de la base B-orthogonale $(v_1, jv_1, \ldots, v_r, jv_r)$ de E est indépendant de ce choix. On se fixe une orientation ε_+ de E et on pose

$$J=\{j\in G^+ \mid j^2=-I_V, \varepsilon(j)=\varepsilon_+\}.$$

Dans ce qui précède, on a $Q(v_k)=Q(jv_k)$. On en déduit que J est non vide si et seulement si la signature de Q est de la forme $(2p, 2q)$, ce que nous supposons désormais. On a une injection $j\to x(j)$ de J dans X donnée par $x(j)=\mathrm{Im}(I_E-ij)$. En choisissant convenablement X_+ dans X, on peut supposer que l'image de cette injection est égale à $\{x\in X_+ \mid x\cap E=\{0\}\}$. Le second choix possible consisterait à remplacer X_+ par X_-.

On a de plus une bijection $j \to l(j) = (\bar{x}(j), x(j))$ de J sur le sous-ensemble L de $I \times X^+$ formé par les éléments l de la forme $(\bar{x}, x)$ tels que $x \in X^+$, $\bar{x}$ est le conjugué de x dans $V = E^{\mathbb{C}}$ et $x \cap \bar{x} = \{0\}$. Un argument de densité de Zariski permet de vérifier que les ouverts $V_l = \{g \in G^+ \mid gx \cap \bar{x} = \{0\}\}$ recouvrent G^+. On se trouve donc dans la situation de 3.1. Soient $j, j' \in J$. Posons $l(j) = l = (\bar{x}, x)$ et $l(j') = l' = (\bar{x}', x')$. Définissons $V_j = V_l$, $\gamma_j = \gamma_l$ et $\tau_{j'j} = \tau_{l'l}$ et cherchons à les exprimer en fonction de j et de j'. On a une bijection $\mathbb{C}$-linéaire naturelle $\alpha(x) = \pi^{\bar{x}}_{x \mid E} = 1/2(I_E - ij)$ de (E, j) sur x, avec $\alpha(x)^{-1} = 2\,\mathrm{Re}|_x$. Cela implique que $\alpha(x)^{\mathbb{C}} = \pi^{\bar{x}}_x$. Reprenant les formules (3.1.8), on pose, pour g dans $V_j \cap V_{j'}$

$$\begin{aligned} a_{j'j}(g) &= \alpha(x')^{-1} A_{l'l}(g)\, \alpha(x) = 2\,\mathrm{Re}\, \pi^{\bar{x}'}_{x'} g \pi^{\bar{x}}_{x \mid E} \\ &= \tfrac{1}{2} \mathrm{Re}(I_E - ij')\, g(I_E - ij) \end{aligned}$$

$$a_{j'j}(g) = \tfrac{1}{2}(g - j'gj), \qquad a_j(g) = a_{jj}(g) = \tfrac{1}{2}(g - jgj).$$

On vérifie que $a_{j'j}(g)$ est une bijection $\mathbb{C}$-linéaire de (E, j) sur (E, j'). Par ailleurs, on note $\det_j$ le déterminant complexe sur (E, j). On remarque également que

$$1 \to \{\pm 1\} \to \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}^2_* \to 1$$

est une suite exacte de groupes de Lie. On est conduit à reformuler les résultats de la section 3, en prenant J au lieu de L comme famille d'indices et en utilisant aussi les résultats de [6, section 5]. On obtient la

4.2. Proposition. *On a un recouvrement $\mathscr{V} = (V_j)_{j \in J}$ de G^+ dont les composantes $V_j = \{g \in G^+ \mid \mathrm{Ker}\, a_j(g) = \{0\}\}$ sont des ouverts de trivialisation pour le fibré principal $(\tilde{G}^+, \pi', G^+, \mathbb{C}^*)$. Pour chaque $j \in J$, on a une équivalence naturelle de fibrés principaux $(u, g) \to (u, j, g)$ de $\mathbb{C}^* \times V_j$ dans $\pi'^{-1}(V_j)$ de telle sorte que, chaque fois que $g \in V_j \cap V_{j'}$, on ait $(u, j, g) = (u\tau_{j'j}(g)^{-1}, j', g)$. Si, de plus $\mathrm{Ker}[a_{jj'}(g)\, a_{j'j}(e)] = \{0\}$ on a*

$$\begin{aligned} \tau_{j'j}(g) = {} & \det\nolimits_{j'}^{1/2}(a_{j'}(g)^{-1}\, a_{j'j}(e)\, a_{j'j}(g^{-1})^{-1}) \\ & \times \det\nolimits_j^{-1/2}(a_{j'j}(g^{-1})^{-1}\, a_{j'j}(e)\, a_j(g)^{-1}) \end{aligned}$$

ce qui détermine la fonction de transition τ. Soient $\tilde{g}, \tilde{g}' \in \tilde{G}^+$; alors il existe $j \in J$ tel que g, g' et gg' appartiennent à V_j. On a alors $\tilde{g} = (u, j, g)$, $\tilde{g}' = (u', j, g')$ et $\tilde{g}\tilde{g}' = (uu'\gamma_j(g, g'), j, gg')$ avec

$$\gamma_j(g, g') = \det\nolimits_j^{1/2}(a_j(g)^{-1}\, a_j(gg')\, a_j(g')^{-1}),$$

ce qui détermine la loi de composition de $\tilde{G}^+$. De plus,

$$\tilde{G}^+_{\mathrm{cr}} = \{(u, j, g) \in \tilde{G}^+ \mid u^2 = \det\nolimits_j a_j(g)\}$$

est un sous-groupe de Lie de $\tilde{G}^+$ qui est une réalisation du relèvement à deux feuillets de G^+ isomorphe au groupe spinoriel.

5. Spineurs purs et k-variétés algébriques

5.1. Dans ce qui suit, on suppose que K est un corps algébriquement clos et que k est un sous-corps de K. On se donne un k-espace vectoriel V_r de dimension $2p$ muni d'une forme quadratique non dégénérée Q_r d'indice maximal. On suppose que $V = V_r \otimes_k K$ et que $Q = Q_r \otimes_k K$. On pose

$$G_r^+ = G^+(V_r) \qquad \text{et} \qquad (X_\pm)_r = X_\pm(V_r).$$

On identifie respectivement V_r et $(G_r^+, (X_+)_r)$ à un sous-espace vectoriel de V et à un sous-espace de transformation de (G^+, X_+) par les applications $v \mapsto v \otimes_k 1_K$, $g \to g \otimes_k 1_K$ et $x \to x \otimes_k 1_K$.

On se place dans le cadre de la catégorie $\mathscr{C}$ des k-variétés algébriques sur K. On utilise les résultats et les conventions de la section 6 de [6]. En particulier, on appelle ouvert d'une k-variété algébrique, une k-sous-variété algébrique ouverte.

On pose $I_r = (X_{(-1)^p})_r$. C'est un sous-ensemble de $I = X_{(-1)^p}$. Dans cette section, on convient que les lettres j (resp. y), parfois indicées, désignent des éléments fixes de I_r (resp. $(X_+)_r$). On note $Y_j = \{x \in X \mid x \cap j = \{0\}\}$. Une démonstration technique utilisant les résultats de 1.2 permet d'affirmer que

$$\forall x, x' \in X_+, \qquad \exists j \in I_r \qquad \text{tel que} \qquad x, x' \in Y_j. \tag{5.1.1}$$

On vérifie de même qu'il existe une famille finie d'éléments j_p de I_r telle que les Y_{j_p} recouvrent X_+.

Un Y_j du type précédent est un espace affine attaché à l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_A(V_r/j, (V_r/j)^*) \otimes_k K$. Il peut donc être muni d'une structure naturelle de k-variété algébrique affine dont $Y_j \cap (X_+)_r$ est l'ensemble des points rationnels. On peut alors munir X_+ d'une unique structure de k-variété algébrique de telle sorte que les Y_j ci-dessus soient des k-sous-variétés affines ouvertes de X_+. Une première méthode pour le voir consiste à utiliser les résultats classiques concernant les variétés projectives et plus spécialement les grassmanniennes (adapter [4, 1.6]). Nous utilisons une seconde méthode en remarquant tout d'abord que, pour $j, j' \in I_r$, $Y_j \cap Y_{j'}$ est un ouvert principal de Y_j. On choisit pour cela, $y \in (X_+)_r \cap Y_j \cap Y_{j'}$. Utilisant (3.2.2), on a

$$Y_j \cap Y_{j'} = \{x \in Y_j \mid \det(I_y - W^y_{jj'} W^j_{yx}) \neq 0\}.$$

On constate ensuite que l'injection $Y_j \cap Y_{j'} \to Y_{j'}$ est un $\mathscr{C}$-morphisme en utilisant, pour $x \in Y_j \cap Y_{j'}$, la formule ci-dessous qui se déduit de (3.2.2) et qui ne fait intervenir que des expressions rationnelles de W^j_{yx} à coefficients dans k.

$$\begin{aligned} W^{j'}_{yx} &= \pi^y_{j'|j} W^j_{yx} (\pi^{j'}_y \pi^j_{x|y})^{-1} \\ &= (I_j + W^y_{jj'}) W^j_{yx} (I_y - W^y_{jj'} W^j_{yx})^{-1}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est bien connu que G^+ est un k-groupe algébrique affine dont G^+_r est le sous-groupe des points rationnels (voir [4, 34.2 et 7.2]). Pour le voir, on écrit ses éléments sous forme matricielle et on exprime que les coefficients vérifient certaines équations polynômiales à coefficients dans k.

Soit φ: $g, x \to gx$ l'application naturelle de $G^+ \times X_+$ dans X_+. Vérifions que c'est un $\mathscr{C}$-morphisme. D'après (5.1.1), étant donné $(g, x) \in G^+ \times X_+$, il existe $j \in I_r$ tel que $x \in Y_j$ et $gx \in Y_j$. Donc les ouverts principaux

$$\varphi^{-1}(Y_j) \cap (G^+ \times Y_j) = \{(g, x) \in G^+ \times Y_j \mid \det(A^j_y(g) + B^j_y(g)\, W^j_{yx}) \neq 0\}$$

recouvrent $G^+ \times X_+$ lorsque j varie dans I_r. D'après la formule (1.2.3), la restriction de φ à de tels ouverts principaux, dont l'image est contenue dans Y_j, est bien un $\mathscr{C}$-morphisme.

En résumé, (G^+, X_+) est un espace de transformation dans $\mathscr{C}$.

5.2. Proposition. (1) *Dans la catégorie des k-variétés algébriques,* $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ *est une extension par* K_* *de l'espace de transformation* (G^+, X_+) *dont* $(\tilde{G}^+_r, (\tilde{X}_+)_r)$ *est l'ensemble des points rationnels.*

(2) *Le groupe de Clifford réduit* $\tilde{G}^+_{\mathrm{cr}}$ *est un k-sous-groupe algébrique fermé de* $\tilde{G}^+$.

Preuve. (1) D'après la théorie de [6], il suffit de montrer que le cocycle m donné en (2.1.1) est un $\mathscr{C}$-morphisme à valeurs dans K_*, défini sur un ouvert de $I^3 \times X^3_+$.

Vérifions que les éléments (i, x) tels que $i \cap x = \{0\}$ forment un ouvert de $I \times X_+$. Comme les ouverts $Y_y \times Y_j$ pour lesquels $y \cap j = \{0\}$ recouvrent $I \times X_+$, il suffit de remarquer que pour $(i, x) \in Y_y \times Y_j$, on a

$$i \cap x = \{0\} \Leftrightarrow \det(I_y - W^y_{ji} W^j_{yx}) \neq 0.$$

On en déduit que le domaine de définition dU de m donné par

$$\begin{aligned} d\mathrm{U} = \{(i_0, i_1, i_2; x_0, x_1, x_2) \in I^3 \times X^3_+ \mid i_p \cap x_p = \{0\}, \\ i_p \cap x_{p+1} = \{0\}, p \in \mathbb{F}_3\} \end{aligned}$$

est un ouvert de $I^3 \times X^3_+$.

On associe à $(y_0, y_1, y_2, j_0, j_1, j_2) \in (X_+^3 \times I^3)_r$ tel que $y_p \cap j_p = \{0\}$ (pour $p \in \mathbb{F}_3$), l'ouvert de $I^3 \times X_+^3$ formé par les éléments $(i_0, i_1, i_2; x_0, x_1, x_2)$ tels que $(i_p, x_p) \in Y_{y_p} \times (Y_{j_p} \cap Y_{j_{p-1}})$. Les ouverts ainsi obtenus recouvrent $I^3 \times X_+^3$: il suffit pour le voir de choisir j_p transverse à x_p et à x_{p+1}, puis y_p transverse à i_p et à j_p. Calculons m sur un tel ouvert. Choisissons $y'_p \in (X_+)_r$ tel que $y'_p \cap j_p = \{0\}$ et $y'_p \cap j_{p-1} = \{0\}$. On obtient, en utilisant (2.1.1)

$$
\begin{aligned}
& m_{i_0 i_1 i_2}(x_0, x_1, x_2)\, m_{j_0 j_1 j_2}(y'_0, y'_1, y'_2)^{-1} \\
&\quad = \prod_{p \in \mathbb{F}_3} \frac{(\tilde{x}_p \mid \tilde{\imath}_p)(\tilde{y}_p \mid \tilde{\jmath}_p)}{(\tilde{x}_p \mid \tilde{\jmath}_p)(\tilde{y}_p \mid \tilde{\imath}_p)} \left[\frac{(\tilde{x}_{p+1} \mid \tilde{\imath}_p)(\tilde{y}_p \mid \tilde{\jmath}_p)}{(\tilde{x}_{p+1} \mid \tilde{\jmath}_p)(\tilde{y}_p \mid \tilde{\imath}_p)} \right]^{-1} \\
&\qquad \times \left[\frac{(\tilde{x}_p \mid \tilde{\jmath}_{p-1})(\tilde{y}'_p \mid \tilde{\jmath}_p)}{(\tilde{x}_p \mid \tilde{\jmath}_p)(\tilde{y}'_p \mid \tilde{\jmath}_{p-1})} \right]^{-1} \\
&\quad = \prod_{p \in \mathbb{F}_3} B(\exp w^{y_p}_{j_p i_p}, \exp w^{j_p}_{y_p x_p})\, B(\exp w^{y_p}_{j_p i_p}, \exp w^{j_p}_{y_p x_{p+1}})^{-1} \\
&\qquad \times B(\exp w^{y'_p}_{j_p j_{p-1}}, \exp w^{j_p}_{y'_p x_p})^{-1}.
\end{aligned}
$$

Sous cette forme, il est clair que m est un $\mathscr{C}$-morphisme.

(2) Il suffit d'utiliser le corollaire 3.4. On notera que les résultats de [6, section 5] ne s'appliquent pas. En effet K_* n'est pas, en général, une extension localement triviale de K_*^2 par $\{\pm 1\}$ dans $\mathscr{C}$.

6. Spineurs purs en dimension impaire; description de $(\tilde{G}, \tilde{X})$

6.1. Nous allons voir qu'en dimension impaire, il existe à équivalence près deux types de variétés de spineurs purs et que leur étude cohomologique se ramène à celle de $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$, en dimension immédiatement supérieure. Dans le même ordre d'idée, nous constaterons que, s'il est plus difficile de décrire cohomologiquement l'extension $(\tilde{G}, \tilde{X})$ de (G, X) que l'extension $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$ de (G^+, X_+), on peut cependant voir que la résolution du second problème en dimension $2r$ (telle que nous l'avons donnée dans les sections 3 et 4) permet celle du premier en dimension $2r-2$.

Pour simplifier, nous nous plaçons de nouveau dans le cadre de la catégorie des espaces discrets. Nous adoptons les notations de la section 1. Lorsque car $K \neq 2$, nous nous donnons $f \in V$ tel que $Q(f) = -1$ et nous définissons le sous-espace vectoriel $V' = f^\perp$ de V muni de la forme quadratique $Q' = Q|_{V'}$. Dans le cas général, on se donne aussi un sous-espace vectoriel V'' de codimension 2 de V, pour lequel la restriction $Q'' = Q|_{V''}$ est non dégénérée d'indice maximal.

On pose $G(V')=G'$, $X(V')=X'$, $G(V'')=G''$, $X(V'')=X''$, $\tilde{G}(V'')=\tilde{G}''$, $\tilde{X}(V'')=\tilde{X}''$, $C(V')=C'$ et $C(V'')=C''$.

On vérifie qu'il existe un unique morphisme d'espaces de transformation $(\varphi', \varphi)\colon (G', X') \to (G^+, X_+)$ tel que pour $(g', x') \in (G', X')$, $g=\varphi'(g')$ et $x=\varphi(x')$, on ait $g|_{V'}=g'$, $gf=(-1)^{\det g'} f$ et $x \cap V'=x'$. L'homomorphisme φ' est injectif, l'application φ est bijective.

L'application $v' \to fv'$ de V' dans C^+ se prolonge, de façon unique, en un isomorphisme entre les algèbres C' et C^+. D'après 1.3, cela implique que C' possède à isomorphisme près, deux représentations irréductibles. On peut supposer que ces représentations ρ'_+ et ρ'_- agissent respectivement dans S_+ et dans S_- de telle sorte que $\rho'_\pm(v')=\rho_\pm(fv')$ pour $v' \in V'$. Nous posons

$$\tilde{G}'_+ = \{\tilde{g}' \in \mathrm{Aut}(S_+) \mid \exists g' \in G',\ \tilde{g}'\rho'_+(v')\,\tilde{g}'^{-1} = (-1)^{\det g'}\,\rho'_+(g'v'),\ \forall v' \in V'\}$$

$$\tilde{X}'_+ = \{\tilde{x}' \in S_+,\ \tilde{x}' \neq 0 \mid \exists x' \in X',\ \rho'_+(v')\,\tilde{x}'=0,\ \forall v' \in x'\}.$$

On définirait de même $\tilde{G}'_-$ et $\tilde{X}'_-$. Comme dans 1.4, on constate que le groupe $\tilde{G}'_+$ est une extension centrale de G' par K_*. On note π'_+ l'homomorphisme $\tilde{g}' \to g'$ de $\tilde{G}'_+$ sur G'. Rappelons que $\tilde{G}^+$ laisse S_+ stable (proposition 1.6). Soient $g' \in G'$ et $\tilde{g} \in \tilde{G}^+$ tels que $\varphi'(g')=g$. Pour $v' \in V'$, on a

$$\tilde{g}\rho'_+(v')\,\tilde{g}^{-1}|_{S_+} = \tilde{g}\rho_+(fv')\,\tilde{g}^{-1}|_{S_+} = (-1)^{\det g'}\,\rho'_+(g'v').$$

Cela prouve l'existence d'un unique homomorphisme $\tilde{\varphi}'\colon \tilde{G}'_+ \to \tilde{G}^+$ tel que $\varphi' \circ \pi'_+ = \pi' \circ \tilde{\varphi}'$ et que pour $\tilde{g}' \in \tilde{G}'_+$ et $\tilde{g}=\tilde{\varphi}'(\tilde{g}')$, on ait $\tilde{g}|_{S_+}=\tilde{g}'$. Il est injectif et commute avec l'action de K_* sur $\tilde{G}'_+$ et $\tilde{G}^+$. Pour les mêmes raisons que dans 1.4, on constate par ailleurs qu'une droite vectorielle d'éléments $\tilde{x}'$ de S_+ est associée au plus à un élément $x'=\pi_+(\tilde{x}')$ vérifiant les relations ci-dessus. Prouvons que $(\tilde{X}'_+, \pi_+, X', K^*)$ est un fibré principal d'espace total $\tilde{X}'_+$ et de base X', que les sous-ensembles $\tilde{X}'_+$ et $\tilde{X}_+$ de S_+ coincident et que, en désignant par $\tilde{\varphi}$ l'application identique du premier sur le second, on a $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi_+$ sur $\tilde{X}'_+$. Il suffit pour le voir de constater que pour $\tilde{x} \in \tilde{X}_+$, $x'=x \cap V'$ et $v' \in x'$, on a $\rho'_+(v')\,\tilde{x}=\rho_+(f)\rho_+(v')\,\tilde{x}=0$.

On obtient le diagramme commutatif suivant dont les flèches horizontales (resp. verticales) sont des morphismes d'espace de transformation injectifs (resp. surjectifs), et dans lequel $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\varphi}'$ commutent avec les actions correspondantes de K_*,

$$\begin{array}{ccc}
(\tilde{G}'_+, \tilde{X}'_+) & \xrightarrow{(\tilde{\varphi}', \tilde{\varphi})} & (\tilde{G}^+, \tilde{X}_+) \\
{\scriptstyle (\pi'_+, \pi_+)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle (\pi', \pi)} \\
(G', X') & \xrightarrow{(\varphi', \varphi)} & (G^+, X_+).
\end{array}$$

L'étude cohomologique de $(\tilde{G}'_+, \tilde{X}'_+)$ se déduit donc par restriction de celle de $(\tilde{G}^+, \tilde{X}_+)$. Un raisonnement identique permet de construire le diagramme commutatif suivant qui possède les mêmes propriétés que le précédent et d'en déduire des conclusions analogues

$$\begin{tikzcd} (\tilde{G}'', \tilde{X}'') \arrow[r] \arrow[d] & (\tilde{G}^+, \tilde{X}_+) \arrow[d] \\ (G'', X'') \arrow[r] & (G^+, X_+). \end{tikzcd}$$

Remerciement

Des questions de Michèle Vergne sont à l'origine de ce travail. Ses conseils et ses critiques m'ont également permis d'exposer mes résultats dans le cadre d'un formalisme satisfaisant, ce qui était délicat. Je l'en remercie vivement.

Références

1. N. Bourbaki, "Eléments de mathématique (Algèbre)," Livre II, Chap. 9, Actualités Sc. et Ind. n° 1272, Hermann, Paris, 1959.
2. C. Chevalley, "The Algebraic Theory of Spinors," Columbia Univ. Press, New York, 1954.
3. A. Crumeyrolle, Algèbre de Clifford et spineurs, Polycopié, Université de Toulouse, 1974.
4. J. Humphreys, "Linear Algebraic Groups," Graduate Texts in Mathematics, Vol. 21, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1975.
5. B. Magneron, Une réalisation des groupes de Clifford par fibration en droites des groupes orthogonaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* **293** (1981), 451–454.
6. B. Magneron, Cohomologie des groupes et des espaces de transformation, *J. Algebra* **112** (1988), 326–348.
7. D. Niederman, "Spinors in Hilbert Space and the Infinite Orthogonal Group," Thesis, MIT, Cambridge, MA, 1981.
8. I. R. Porteous, "Topological Geometry," Chap. 13, Van Nostrand–Reinhold, Princeton, NJ, 1969.